Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Mathematik-Vorkenntnisse: Langlösungen

Thomas Borer, Dipl. Phys. ETH, Professor für Mathematik und Physik
thomas.borer@fhgr.ch

8.6.2023

Langlösungen zu den Testaufgaben

Terme

1. a) $2 + 3 \cdot 4$

$= 2 + (3 \cdot 4)$

$= 2 + 12$

$= 14$

b) 3^{-2}

$= \frac{1}{3^2}$

$= \frac{1}{9}$

c) -2^4

$= -(2^4)$

$= -16$

d) $\sqrt{16}$

$= 4$ (nur 4, nicht ± 4)

2. a) $7x - 5z + 10y + 3y + 8z - 4x$ — Summanden ordnen nach x, y und z

$= 7x - 4x + 10y + 3y - 5z + 8z$

$= (7x - 4x) + (10y + 3y) + (-5z + 8z)$

$= 3x + 13y + 3z$

b) $(32m + 13q) - (14m + 7q)$ — Klammern auflösen

$= 32m + 13q - 14m - 7q$

$= 32m - 14m + 13q - 7q$

$= (32m - 14m) + (13q - 7q)$

$= 18m + 6q$

	c)	$(15a - 2b) - (7a - (2a + b))$	Klammer $(2a + b)$ auflösen
		$= 15a - 2b - (7a - 2a - b)$	Klammer auflösen
		$= 15a - 2b - 7a + 2a + b$	Summanden ordnen nach a und b
		$= 15a - 7a + 2a - 2b + b$	
		$= (15a - 7a + 2a) + (- 2b + b)$	
		$= 10a + (- b)$	
		$= 10a - b$	
	d)	$5a^2b \cdot 4ab \cdot 3a^2b$	Faktoren ordnen
		$= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot a^2 \cdot a \cdot a^2 \cdot b \cdot b \cdot b$	
		$= 60 \cdot a^5 \cdot b^3$	
		$= 60a^5b^3$	
	e)	$(x^3 - x^2y + xy^2 - y^3)(x + y)$	ausmultiplizieren
		$= x^3x + x^3y - x^2yx - x^2yy + xy^2x + xy^2y - y^3x - y^3y$	
		$= x^4 + x^3y - x^3y - x^2y^2 + x^2y^2 + xy^3 - xy^3 - y^4$	
		$= x^4 + 0 + 0 + 0 - y^4$	
		$= x^4 - y^4$	
3.	a)	$(p + q)^2$	1. Binomische Formel anwenden
		$= p^2 + 2pq + q^2$	
	b)	$(2x + 3y)^2$	1. Binomische Formel anwenden
		$= (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3y + (3y)^2$	
		$= 4x^2 + 12xy + 9y^2$	
	c)	$(x - y)^2$	2. Binomische Formel anwenden
		$= x^2 - 2xy + y^2$	
	d)	$(2a - 3ax)^2$	2. Binomische Formel anwenden
		$= (2a)^2 - 2 \cdot 2a \cdot 3ax + (3ax)^2$	
		$= 4a^2 - 12a^2x + 9a^2x^2$	
	e)	$(a + 2)(a - 2)$	3. Binomische Formel anwenden
		$= a^2 - 4$	

f) $(5xy + 3xz)(5xy - 3xz)$ — 3. Binomische Formel anwenden

$= (5xy)^2 - (3xz)^2 = 25x^2y^2 - 9x^2z^2$

4. a) $5a^2 - 10a^3 - 25a^4$ — gemeinsamen Faktor $5a^2$ ausklammern

$= 5a^2(1 - 2a - 5a^2)$

b) $3a(x - a)^2 + 12a^2(x - a)$ — gemeinsamen Faktor $3a(x – a)$ ausklammern

$= 3a(x - a)((x - a) + 4a)$

$= 3(x - a)(x - a + 4a)$

$= 3a(x - a)(x + 3a)$

5. a) $\frac{14a}{18ab}$ — Zähler und Nenner faktorisieren

$= \frac{2 \cdot 7 \cdot a}{2 \cdot 9 \cdot ab}$ — Bruch durch Faktoren 2 und a kürzen

$= \frac{7}{9b}$

b) $\frac{ab}{a^2b^2c}$ — Bruch durch Faktoren a und b kürzen

$= \frac{1}{abc}$

c) $\frac{8ab}{4a^2 – 4ab}$ — Zähler und Nenner faktorisieren

$= \frac{2 \cdot 4 \cdot ab}{4a(a - b)}$ — Bruch durch Faktoren 4 und a kürzen

$= \frac{2b}{a - b}$

d) $\frac{p^2 + p}{p^2 - 1}$ — Zähler und Nenner faktorisieren

im Nenner 3. Binomische Formel anwenden

$= \frac{p(p + 1)}{(p + 1)(p - 1)}$ — Bruch durch Faktor p + 1 kürzen

$= \frac{p}{p - 1}$

e) $\frac{x - y}{y - x}$ — im Nenner Faktor -1 ausklammern

$= \frac{x - y}{-(x - y)}$ — Bruch durch Faktor x - y kürzen

$= \frac{1}{-1}$

$= -1$

6. a) $\frac{4y}{2a^2x}$ Bruch mit Faktor $5b^2$ erweitern

$= \frac{4y \cdot 5b^2}{2a^2x \cdot 5b^2}$

$= \frac{20b^2y}{10a^2b^2x}$

b) $\frac{5}{2ax}$ Bruch mit Faktor $5ab^2$ erweitern

$= \frac{5 \cdot 5ab^2}{2ax \cdot 5ab^2}$

$= \frac{25ab^2}{10a^2b^2x}$

7. a) $\frac{9x}{5} - \frac{6x}{5}$

$= \frac{9x - 6x}{5}$

$= \frac{3x}{5}$

b) $\frac{7x - 3y}{a} - \frac{2x + 5y}{a}$

$= \frac{(7x - 3y) - (2x + 5y)}{a}$

$= \frac{7x - 3y - 2x - 5y}{a}$

$= \frac{5x - 8y}{a}$

c) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3}$

Brüche gleichnamig machen:
kleinster gemeinsamer Nenner = 6
ersten Bruch mit 3 erweitern
zweiten Bruch mit 2 erweitern

$= \frac{x \cdot 3}{2 \cdot 3} + \frac{x \cdot 2}{3 \cdot 2}$

$= \frac{3x}{6} + \frac{2x}{6}$

$= \frac{3x + 2x}{6}$

$= \frac{5x}{6}$

d) $\frac{a}{b} - \frac{c}{ab}$

Brüche gleichnamig machen:
kleinster gemeinsamer Nenner = ab
ersten Bruch mit a erweitern

$= \frac{a \cdot a}{b \cdot a} - \frac{c}{ab}$

$= \frac{a^2}{ab} - \frac{c}{ab}$

$= \frac{a^2 - c}{ab}$

e) $\frac{a}{a - b} - \frac{b}{a^2 - b^2}$

Brüche gleichnamig machen:
Nenner faktorisieren

im zweiten Nenner 3. Binomische Formel anwenden

$= \frac{a}{a - b} - \frac{b}{(a + b)(a - b)}$

Brüche gleichnamig machen:
kleinster gemeinsamer Nenner
$= (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

ersten Bruch mit a + b erweitern

$= \frac{a(a + b)}{(a - b)(a + b)} - \frac{b}{(a + b)(a - b)}$

$= \frac{a(a + b) - b}{(a + b)(a - b)}$

$= \frac{a^2 + ab - b}{a^2 - b^2}$

f) $\frac{t + 7}{3t - 6} - \frac{t + 4}{t^2 - 2t}$

Brüche gleichnamig machen:
Nenner faktorisieren

$= \frac{t + 7}{3(t - 2)} - \frac{t + 4}{t(t - 2)}$

Brüche gleichnamig machen:
kleinster gemeinsamer Nenner
$= 3t(t - 2)$

ersten Bruch mit t erweitern

zweiten Bruch mit 3 erweitern

$= \frac{(t + 7) \cdot t}{3(t - 2) \cdot t} - \frac{(t + 4) \cdot 3}{t(t - 2) \cdot 3}$

$= \frac{t^2 + 7t}{3t(t - 2)} - \frac{3t + 12}{3t(t - 2)}$

$= \frac{(t^2 + 7t) - (3t + 12)}{3t(t - 2)}$

$= \frac{t^2 + 7t - 3t - 12)}{3t(t - 2)}$

$= \frac{t^2 + 4t - 12)}{3t(t - 2)}$

Zähler faktorisieren

$= \frac{(t + 6)(t - 2)}{3t(t - 2)}$

Bruch durch Faktor t - 2 kürzen

$= \frac{t + 6}{3t}$

8. a) $6 \cdot \frac{5}{12}$

$= \frac{6 \cdot 5}{12}$

$= \frac{6 \cdot 5}{6 \cdot 2}$

$= \frac{5}{2}$

b) $\frac{3}{4a} \cdot \frac{2}{9b}$

$= \frac{3 \cdot 2}{4a \cdot 9b}$

$= \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot a \cdot 3 \cdot 3 \cdot b}$

$= \frac{1}{2 \cdot a \cdot 3 \cdot b}$

$= \frac{1}{6ab}$

c) $\frac{d - 1}{18d} \cdot \frac{12d^2}{1 - d}$

$= \frac{(d - 1) \cdot 12d^2}{18d(1 - d)}$

$= \frac{2 \cdot 6 \cdot (d - 1)d^2}{- 3 \cdot 6 \cdot d(d - 1)}$

$= \frac{2d}{- 3}$

$= - \frac{2d}{3}$

d) $\frac{12pqr}{2pr}$

$= \frac{2 \cdot 6 \cdot pqr}{2pr}$

$= \frac{6q}{1}$

$= 6q$

e) $\frac{16ab + 12aq}{4a}$

$= \frac{4a(4b + 3q)}{4a}$

$= \frac{4b + 3q}{1}$

$= 4b + 3q$

f) $\frac{30a^4b^3c^2}{5a^2bc}$

$= \frac{5 \cdot 6 \cdot a^4b^3c^2}{5a^2bc}$

$= \frac{6a^2b^2c}{1}$

$= 6a^2b^2c$

g) $\frac{-2x^2 - 4x}{-2x}$

$= \frac{-2x(x+2)}{-2x}$

$= \frac{x+2}{1}$

$= x + 2$

h) $\frac{\frac{ax}{c}}{a}$

$= \frac{\frac{ax}{c}}{\frac{a}{1}}$

$= \frac{ax}{c} \cdot \frac{1}{a}$

$= \frac{ax}{ac}$

$= \frac{x}{c}$

i) $\frac{\frac{a}{b^2}}{\frac{a^2}{b}}$

$= \frac{a}{b^2} \cdot \frac{b}{a^2}$

$= \frac{ab}{a^2b^2}$

$= \frac{1}{ab}$

j) $\frac{x}{\frac{1}{y}}$

$= \frac{\frac{x}{1}}{\frac{1}{y}}$

$= \frac{x}{1} \cdot \frac{y}{1}$

$= \frac{xy}{1}$

$= xy$

k) $\frac{r^2 + \frac{1}{r}}{r + \frac{1}{r^2}}$

$= \frac{\frac{r^2}{1} + \frac{1}{r}}{\frac{r}{1} + \frac{1}{r^2}}$

$$= \frac{\frac{r^2 \cdot r}{1 \cdot r} + \frac{1}{r}}{\frac{r \cdot r^2}{1 \cdot r^2} + \frac{1}{r^2}}$$

$$= \frac{\frac{r^3}{r} + \frac{1}{r}}{\frac{r^3}{r^2} + \frac{1}{r^2}}$$

$$= \frac{\frac{r^3 + 1}{r}}{\frac{r^3 + 1}{r^2}}$$

$$= \frac{r^3 + 1}{r} \cdot \frac{r^2}{r^3 + 1}$$

$$= \frac{(r^3 + 1)r^2}{r(r^3 + 1)}$$

$$= r$$

9. a) $$\frac{\left(a^2 b^3 a^4\right)^5}{\left(b^2 a^3 b^5\right)^2}$$

$$= \frac{\left(a^2\right)^5 \left(b^3\right)^5 \left(a^4\right)^5}{\left(b^2\right)^2 \left(a^3\right)^2 \left(b^5\right)^2}$$

$$= \frac{a^{2 \cdot 5} b^{3 \cdot 5} a^{4 \cdot 5}}{b^{2 \cdot 2} a^{3 \cdot 2} b^{5 \cdot 2}}$$

$$= \frac{a^{10} b^{15} a^{20}}{b^4 a^6 b^{10}}$$

$$= \frac{a^{30} b^{15}}{a^6 b^{14}}$$

$$= a^{24} b$$

b) $$\left(\frac{a^{-1} b^2}{a^{-3} b^4}\right)^{-5}$$

$$= \left(\frac{a^3 b^2}{a b^4}\right)^{-5}$$

$$= \left(\frac{a^2}{b^2}\right)^{-5}$$

$$= \frac{\left(a^2\right)^{-5}}{\left(b^2\right)^{-5}}$$

$$= \frac{a^{2 \cdot (-5)}}{b^{2 \cdot (-5)}}$$

$$= \frac{a^{-10}}{b^{-10}}$$

$$= a^{-10} b^{10}$$

c) $$\left(\frac{a^{1/2}\, b}{a^{-1/3}\, b^{11/8}}\right)^{-24/5}$$

$$= \left(a^{1/2 - (-1/3)}\, b^{1 - 11/8}\right)^{-24/5}$$

$= \left(a^{5/6}\, b^{-3/8}\right)^{-24/5}$

$= \left(a^{5/6}\right)^{-24/5} \left(b^{-3/8}\right)^{-24/5}$

$= a^{5/6 \cdot (-24/5)}\, b^{-3/8 \cdot (-24/5)}$

$= a^{-4}\, b^{9/5}$

10. a) x^2 ist für alle reellen Zahlen x definiert. Und eine beliebige reelle Zahl kann von einer beliebigen reellen Zahl subtrahiert werden. Daher ist der Ausdruck für alle reellen Zahlen x definiert.

b) Die Division durch null ist nicht definiert. Der Nenner darf also nicht null sein. Daher ist der Ausdruck nicht definiert für $x = -2$.

c) Die Wurzel aus einer negativen reellen Zahl ist nicht definiert. Der Term unter der Wurzel darf also nicht kleiner als null sein. Daher ist der Ausdruck nicht definiert für $x < -3$.

d) Die Division durch null ist nicht definiert. Und die Wurzel aus einer negativen reellen Zahl ist nicht definiert. Der Term unter der Wurzel muss also grösser als null sein. x^2 muss folglich grösser als 4 sein. Dies bedeutet, dass x grösser als 2 oder kleiner als -2 sein muss. Daher ist der Ausdruck nicht definiert für $-2 \leq x \leq 2$.

Mengen

11. a) $B \cup C$ ist die Vereinigungsmenge der beiden Mengen B und C. Sie besteht aus allen Elementen, die entweder in der Menge B oder in der Menge C oder sowohl in der Menge B als auch in der Menge C liegen.

$B \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6, 8\}$

b) $B \cap C$ ist die Schnittmenge der beiden Mengen B und C. Sie besteht aus allen Elementen, die sowohl in der Menge B als auch in der Menge C liegen.

$B \cap C = \{2, 4\}$

c) $(A \cup B) \setminus C$ ist die Differenzmenge der Mengen $A \cup B$ und C. Sie besteht aus allen Elementen, die in der Menge $A \cup B$, jedoch nicht in der Menge C liegen. Die Menge $A \cup B$ ist die Vereinigungsmenge der beiden Mengen A und B. Sie besteht aus allen Elementen, die entweder in der Menge A oder in der Menge B oder sowohl in der Menge A als auch in der Menge B liegen.

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$(A \cup B) \setminus C = \{1, 6, 7, 8\}$

12. a) Paris $\in$ B ist wahr. Paris liegt in Europa, ist also ein Element der Menge B.

b) Sydney $\notin$ C ist falsch. Sydney liegt am Meer, ist also ein Element der Menge C.

c) $B \subset A$ ist wahr. Jede europäische Stadt liegt auf der Welt. Daher liegt jedes Element der Menge B auch in der Menge A. Die Menge B ist also eine Teilmenge der Menge A.

d) $A \cap B = B$ ist wahr. Die Schnittmenge der Menge aller Städte der Welt und der Menge aller europäischen Städte ist gleich der Menge aller europäischen Städte, weil jede europäische Stadt auf der Welt liegt. Die Menge $A \cap B$ ist also gleich der Menge B.

e) $B \cap C = \{\}$ ist falsch. Es gibt Städte, die sowohl in Europa als auch am Meer liegen. Diese Städte sind die Elemente der Menge $B \cap C$. Daher ist die Menge $B \cap C$ nicht gleich der leeren Menge $\{\}$. Die leere Menge $\{\}$ enthält keine Elemente.

Gleichungen

13. a)

$22(x - 11) - 5(x - 40) = 110 - (x + 53)$	ausmultiplizieren
$22x - 242 - (5x - 200) = 110 - (x + 53)$	Klammern auflösen
$22x - 242 - 5x + 200 = 110 - x - 53$	auf beiden Seiten vereinfachen
$17x - 42 = 57 - x$	$+ x, + 42$
$18x = 99$	$: 18$
$x = \frac{99}{18}$	
$= \frac{9 \cdot 11}{9 \cdot 2}$	
$= \frac{11}{2}$	

b)

$\frac{45}{2x - 9} - 2 = -\frac{27}{9 - 2x}$	Nenner faktorisieren
$\frac{45}{2x - 9} - 2 = -\frac{27}{-(2x - 9)}$	
$\frac{45}{2x - 9} - 2 = \frac{27}{2x - 9}$	$\cdot (2x - 9)$ (= kleinstes gemeinsames Vielfaches aller Nenner)
$\frac{45(2x - 9)}{2x - 9} - 2(2x - 9) = \frac{27(2x - 9)}{2x - 9}$	auf beiden Seiten kürzen
$45 - 2(2x - 9) = 27$	ausmultiplizieren
$45 - (4x - 18) = 27$	Klammern auflösen
$45 - 4x + 18 = 27$	links vereinfachen
$63 - 4x = 27$	$+ 4x, - 27$
$36 = 4x$	Seiten vertauschen
$4x = 36$	$: 4$
$x = 9$	

c)

$\frac{x}{x - 1} - \frac{x - 1}{x - 2} = 0$	$\cdot (x - 1)(x - 2)$ (= kleinstes gemeinsames Vielfaches aller Nenner)
$\frac{x(x - 1)(x - 2)}{x - 1} - \frac{(x - 1)(x - 1)(x - 2)}{x - 2} = 0(x - 1)(x - 2)$	Brüche kürzen
$x(x - 2) - (x - 1)^2 = 0$	ausmultiplizieren
$x^2 - 2x - (x^2 - 2x + 1) = 0$	Klammer auflösen
$x^2 - 2x - x^2 + 2x - 1 = 0$	vereinfachen
$-1 = 0$	

Diese Aussage ist für jede reelle Zahl x falsch. Daher hat die Gleichung keine Lösung.

d)	$2a + cx = c - x$	$+ x, - 2a$
	$cx + x = c - 2a$	links x ausklammern
	$x(c + 1) = c - 2a$	$: (c + 1)$ nur möglich, falls $c + 1 \neq 0$
	Fall 1: $c + 1 \neq 0$, d.h. $c \neq -1$	
	$x(c + 1) = c - 2a$	$: (c + 1) \neq 0$
	$x = \frac{c - 2a}{c + 1}$	
	Fall 2: $c + 1 = 0$, d.h. $c = -1$	
	$x(c + 1) = c - 2a$	$c = -1$ einsetzen
	$x(- 1 + 1) = - 1 - 2a$	vereinfachen
	$x \cdot 0 = - 1 - 2a$	vereinfachen
	$0 = - 1 - 2a$	

Diese Aussage ist wahr, falls $- 1 - 2a = 0$, d.h. falls $a = -1/2$.
Die Gleichung ist für jedes reelle x erfüllt, falls $a = -1/2$.

Diese Aussage ist falsch, falls $-1 - 2a \neq 0$, d.h. falls $a \neq -1/2$.
Die Gleichung ist für kein reelles x erfüllt, falls $a \neq -1/2$.

Die Lösungen der Gleichung hängen also von den Werten der Parameter a und c ab:

falls $c \neq -1$:
Die Gleichung hat genau eine Lösung. Sie lautet $x = \frac{c - 2a}{c + 1}$

falls $c = -1$ und $a = -1/2$:
Die Gleichung hat unendlich viele Lösungen. Jedes $x \in \mathbb{R}$ ist eine Lösung.

falls $c = -1$ und $a \neq -1/2$:
Die Gleichung hat keine Lösung.

e)	$2\lvert x\rvert = \lvert x - 5\rvert + 1$	Beträge auflösen: Fallunterscheidung
	Fall 1: $x < 0$	$\lvert x\rvert = - x$ $\lvert x - 5\rvert = - (x - 5)$
	$2(-x) = - (x - 5) + 1$	ausmultiplizieren, Klammern auflösen
	$-2x = - x + 5 + 1$	vereinfachen, + x
	$-x = 6$	$: (-1)$
	$x = -6$	
	liegt im Bereich $x < 0$, ist also eine Lösung	
	Fall 2: $0 \leq x < 5$	$\lvert x\rvert = x$ $\lvert x - 5\rvert = - (x - 5)$
	$2x = - (x - 5) + 1$	Klammern auflösen
	$2x = - x + 5 + 1$	vereinfachen, + x
	$3x = 6$	$: 3$
	$x = 2$	

liegt im Bereich $0 \le x < 5$, ist also eine Lösung

Fall 3: $x \ge 5$ — $|x| = x$, $|x - 5| = x - 5$

$2x = x - 5 + 1$ — vereinfachen, $- x$

$x = -4$

liegt nicht im Bereich $x \ge 5$, ist also keine Lösung

Die Gleichung hat die beiden Lösungen $x_1 = -6$ und $x_2 = 2$.

14. a)

$2(x - 1) - 5(x - 4) < 10 - (x + 5)$ — ausmultiplizieren

$2x - 2 - (5x - 20) < 10 - (x + 5)$ — Klammern auflösen

$2x - 2 - 5x + 20 < 10 - x - 5$ — auf beiden Seiten vereinfachen

$-3x + 18 < 5 - x$ — $+ x, - 18$

$-2x < -13$ — $: (-2)$
(< 0, d.h. Vergleichszeichen kehrt)

$x > \frac{13}{2}$

b)

$\frac{1}{x - 2} < \frac{3}{x + 1}$ — $\cdot (x - 2)(x + 1)$
Vergleichszeichen: Fallunterscheidung

Fall 1: $(x - 2)(x + 1) > 0$, d.h. $x < -1$ oder $x > 2$

$\frac{1}{x - 2} < \frac{3}{x + 1}$ — $\cdot (x - 2)(x + 1)$
(> 0, d.h. Vergleichszeichen bleibt)

$\frac{(x - 2)(x + 1)}{x - 2} < \frac{3(x - 2)(x + 1)}{x + 1}$ — Brüche kürzen

$x + 1 < 3(x - 2)$ — ausmultiplizieren

$x + 1 < 3x - 6$ — $- x, + 6$, Seiten vertauschen

$2x > 7$ — $: 2$
(> 0, d.h. Vergleichszeichen bleibt)

$x > \frac{7}{2}$

Diese Bedingung kann im Bereich $x > 2$ erfüllt werden, d.h. alle $x > 7/2$ sind Lösungen.

Fall 2: $(x - 2)(x + 1) < 0$, d.h. $-1 < x < 2$

$\frac{1}{x - 2} < \frac{3}{x + 1}$ — $\cdot (x - 2)(x + 1)$
(< 0, d.h. Vergleichszeichen kehrt)

$\frac{(x - 2)(x + 1)}{x - 2} > \frac{3(x - 2)(x + 1)}{x + 1}$ — Brüche kürzen

$x + 1 > 3(x - 2)$ — ausmultiplizieren

$x + 1 > 3x - 6$ — $- x, + 6$, Seiten vertauschen

$2x < 7$ — $: 2$
(> 0, d.h. Vergleichszeichen bleibt)

$x < \frac{7}{2}$

Diese Bedingung erfüllen alle x im Bereich $-1 < x < 2$, d.h. alle x im Bereich $-1 < x < 2$ sind Lösungen.

Die Ungleichung hat unendlich viele Lösungen. Diese bestehen aus allen x, die in den beiden Bereichen $-1 < x < 2$ und $x > 7/2$ liegen.

15. a) $2x^2 + 2x = 0$ faktorisieren

$2x(x + 1) = 0$

Ein Produkt ist genau dann gleich null, falls mindestens einer der Faktoren gleich null ist.

$2x = 0$ oder $(x + 1) = 0$

1. $2x = 0$ | $:2$
   $x = 0$
2. $x + 1 = 0$ | -1
   $x = -1$

Die Gleichung hat die beiden Lösungen $x_1 = 0$ und $x_2 = -1$.

b) $4(x - 2)^2 - 36 = 0$ | $+36$

$4(x - 2)^2 = 36$ | $:4$

$(x - 2)^2 = 9$ | $\sqrt{\ldots}$

$|x - 2| = 3$ | Betrag auflösen: Fallunterscheidung

Fall 1: $x - 2 \geq 0$, d.h. $x \geq 2$ | $|x - 2| = x - 2$

$x - 2 = 3$ | $+2$

$x = 5$

liegt im Bereich $x \geq 2$, ist also eine Lösung

Fall 2: $x - 2 < 0$, d.h. $x < 2$ | $|x - 2| = -(x - 2)$

$-(x - 2) = 3$ | Klammer auflösen

$-x + 2 = 3$ | -2

$-x = 1$ | $\cdot(-1)$

$x = -1$

liegt im Bereich $x < 2$, ist also eine Lösung

Die Gleichung hat die beiden Lösungen $x_1 = 5$ und $x_2 = -1$.

c) $2x^2 - 7x + 3 = 0$

Lösungsformel für quadratische Gleichungen:

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ | $a = 2, b = -7, c = 3$

$= \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2}$ | vereinfachen

$= \frac{7 \pm 5}{4}$

$x_1 = \frac{7+5}{4} = 3 \qquad x_2 = \frac{7-5}{4} = \frac{1}{2}$

Die Gleichung hat die beiden Lösungen $x_1 = 3$ und $x_2 = \frac{1}{2}$.

d) $x^2 - 6x + 9 = 0$

Lösungsformel für quadratische Gleichungen:

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ — a = 1, b = -6, c = 9

$= \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1}$ — vereinfachen

$= \frac{6 \pm 0}{2}$

$x_1 = x_2 = \frac{6}{2} = 3$

Die Gleichung hat die einzige Lösung x = 3.

e) $5x^2 - 8x + 4 = 0$

Lösungsformel für quadratische Gleichungen:

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ — a = 5, b = -8, c = 4

$= \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 4}}{2 \cdot 5}$ — vereinfachen

$= \frac{8 \pm \sqrt{-16}}{10}$

Die Wurzel ist nicht definiert, da der Ausdruck unter der Wurzel negativ ist. Daher hat die Gleichung keine Lösung.

f) $\frac{x-4}{x-5} = \frac{30-x^2}{x^2-5x}$ — Nenner faktorisieren

$\frac{x-4}{x-5} = \frac{30-x^2}{x(x-5)}$ — $\cdot\, x(x-5)$ (= kleinster gemeinsamer Nenner)

$\frac{(x-4)x(x-5)}{x-5} = \frac{(30-x^2)x(x-5)}{x(x-5)}$ — Brüche kürzen

$(x-4)x = 30 - x^2$ — ausmultiplizieren

$x^2 - 4x = 30 - x^2$ — $+ x^2, - 30$

$2x^2 - 4x - 30 = 0$ — 2 ausklammern

$2(x^2 - 2x - 15) = 0$ — : 2

$x^2 - 2x - 15 = 0$ — Lösungsformel anwenden

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ — a = 1, b = -2, c = -15

$= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15)}}{2 \cdot 1}$ vereinfachen

$= \frac{2 \pm 8}{2}$

$x_1 = \frac{2+8}{2} = 5 \qquad x_2 = \frac{2-8}{2} = -3$

$x_1 = 5$ ist jedoch keine Lösung, weil die ursprüngliche Gleichung wegen der Nenner $x - 5$ für $x = 5$ nicht definiert ist.

Die Gleichung hat die einzige Lösung $x = -3$.

16. a) $\sin(x) = \frac{1}{2}$

Es gibt zwei «Winkel» x im Bereich $0 \le x < 2\pi$ mit $\sin(x) = \frac{1}{2}$:

$x_1 = \frac{\pi}{6}$ und $x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

Da die Sinus-Funktion 2π-periodisch ist, ergeben sich die folgenden unendlich vielen Lösungen:

$x_{1k} = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ und $x_{2k} = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

b) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

Es gibt zwei «Winkel» $2x - \frac{\pi}{6}$ im Bereich $0 \le x < 2\pi$ mit $\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$:

$\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)_1 = \frac{2\pi}{3}$ und $\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)_2 = \frac{4\pi}{3}$

Da die Cosinus-Funktion 2π-periodisch ist, ergeben sich die folgenden unendlich vielen Möglichkeiten für $2x - \frac{\pi}{6}$:

$\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)_{1k} = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi$ und $\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)_{2k} = \frac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ $\quad + \frac{\pi}{6}$

$(2x)_{1k} = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ und $(2x)_{2k} = \frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ vereinfachen

$(2x)_{1k} = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ und $(2x)_{2k} = \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi$ $\quad : 2$

Es ergeben sich die folgenden unendlich vielen Lösungen:

$x_{1k} = \frac{5\pi}{12} + k \cdot \pi$ und $x_{2k} = \frac{3\pi}{4} + k \cdot \pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

c) $\cos^2(x) = 1 - \sin(x)$ $\quad \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \Rightarrow \cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$

$1 - \sin^2(x) = 1 - \sin(x)$ $\quad - 1$

$- \sin^2(x) = - \sin(x)$ $\quad + \sin(x)$

$\sin(x) - \sin^2(x) = 0$ $\quad$ sin(x) ausklammern

$\sin(x)\,(1 - \sin(x)) = 0$

Ein Produkt ist genau dann gleich null, falls einer der Faktoren gleich null ist.

$\sin(x) = 0$ oder $1 - \sin(x) = 0$ $\quad + \sin(x)$

$\sin(x) = 0$ oder $\sin(x) = 1$

1. $\sin(x) = 0$ hat die Lösungen $x_{1k} = k \cdot \pi \ \ (k \in \mathbb{Z})$
2. $\sin(x) = 1$ hat die Lösungen $x_{2k} = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \ \ (k \in \mathbb{Z})$

Es ergeben sich also die folgenden unendlich vielen Lösungen:

$x_{1k} = k \cdot \pi$ und $x_{2k} = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \ \ (k \in \mathbb{Z})$

17. a)

$10^x = 1000$	$\log_{10}(\ldots)$
$\log_{10}(10^x) = \log_{10}(1000)$	Logarithmus auswerten
$x = 3$	

b)

$3^x = 81$	$\log_3(\ldots)$
$\log_3(3^x) = \log_3(81)$	Logarithmus auswerten
$x = 4$	

c)

$2^x = \frac{1}{16}$	$\log_2(\ldots)$
$\log_2\left(2^x\right) = \log_2\left(\frac{1}{16}\right)$	Logarithmus auswerten
$x = -4$	

d)

$e^{3x} = 4$	$\ln(\ldots)$
$\ln(e^{3x}) = \ln(4)$	Logarithmus auswerten
$3x = \ln(4)$	$: 3$
$x = \frac{\ln(4)}{3}$	

e)

$e^{2x} + e^x = 2$	Potenzgesetz $\left(a^b\right)^c = a^{b \cdot c}$
$(e^x)^2 + e^x = 2$	Substitution $z := e^x$
$z^2 + z = 2$	$- 2$
$z^2 + z - 2 = 0$	Lösungsformel anwenden
$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$a = 1, b = 1, c = -2$
$= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1}$	vereinfachen
$= \frac{-1 \pm 3}{2}$	
$z_1 = \frac{-1+3}{2} = 1 \qquad z_2 = \frac{-1-3}{2} = -2$	
Fall 1: $z_1 = (e^x)_1 = 1$	Rücksubstitution, $\ln(\ldots)$
$\ln((e^x)_1) = \ln(1)$	Logarithmus auswerten
$x_1 = 0$	

Fall 2: $z_2 = (e^x)_2 = -2$ — Rücksubstitution, $a^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

keine Lösung

Die Gleichung hat die einzige Lösung $x = 0$.

18. a)

$4x + 3y = 14$ (I)
$2x - y = 12$ (II)

(II) nach y lösen

$2x - y = 12$ — $-2x, \cdot(-1)$

$y = 2x - 12$ (III)

in (I) einsetzen

$4x + 3(2x - 12) = 14$ — ausmultiplizieren

$4x + 6x - 36 = 14$ — + 36, vereinfachen

$10x = 50$ — : 10

$x = 5$

in (III) einsetzen

$y = 2\cdot5 - 12 = -2$

Das Gleichungssystem hat die einzige Lösung $(x, y) = (5, -2)$.

b)

$x + 2y = 3$ (I)
$4x + y^2 = 5$ (II)

(I) nach x lösen

$x + 2y = 3$ — $-2y$

$x = 3 - 2y$ (III)

in (II) einsetzen

$4(3 - 2y) + y^2 = 5$ — ausmultiplizieren

$12 - 8y + y^2 = 5$ — -5

$y^2 - 8y + 7 = 0$ — Lösungsformel anwenden

$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ — $a = 1, b = -8, c = 7$

$= \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4\cdot1\cdot7}}{2\cdot1}$ — vereinfachen

$= \frac{8 \pm 6}{2}$

$y_1 = \frac{8+6}{2} = 7$ $\quad y_2 = \frac{8-6}{2} = 1$

in (III) einsetzen

$x_1 = 3 - 2y_1 = 3 - 2\cdot7 = -11$

$x_2 = 3 - 2y_2 = 3 - 2\cdot1 = 1$

Das Gleichungssystem hat die beiden Lösungen $(x, y)_1 = (-11, 7)$ und $(x, y)_2 = (1, 1)$.

Geometrie/Trigonometrie

19. a) i) Satz von Pythagoras im rechtwinkligen Dreieck ABC:

$a^2 + b^2 = c^2$	$- a^2$
$b^2 = c^2 - a^2$	$\sqrt{\ldots}$
$\lvert b \rvert = \sqrt{c^2 - a^2}$	$b \geq 0$
$b = \sqrt{c^2 - a^2}$	

ii)

$b = \sqrt{c^2 - a^2}$	Zahlenwerte für a und c einsetzen
$b = 12$	

b) i) Der Höhenfusspunkt der Höhe h_c liegt auf der Dreiecksseite c und unterteilt diese in zwei Abschnitte:

$p + q = c \qquad (I)$

Die Höhe h_c unterteilt das Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke. Nach dem Satz von Pythagoras gilt in diesen beiden rechtwinkligen Dreiecken:

$h_c^2 + p^2 = a^2 \qquad (II)$

$h_c^2 + q^2 = b^2 \qquad (III)$

Das Gleichungssystem mit den drei Gleichungen (I), (II) und (III) enthält die drei Unbekannten b, p und q.

(II) nach p lösen

$h_c^2 + p^2 = a^2$	$- h_c^2$
$p^2 = a^2 - h_c^2$	$\sqrt{\ldots}$
$\lvert p \rvert = \sqrt{a^2 - h_c^2}$	$b \geq 0$
$p = \sqrt{a^2 - h_c^2}$	

in (I) einsetzen und nach q lösen

$\sqrt{a^2 - h_c^2} + q = c$	$- \sqrt{a^2 - h_c^2}$
$q = c - \sqrt{a^2 - h_c^2}$	

in (III) einsetzen und nach b lösen

$h_c^2 + \left(c - \sqrt{a^2 - h_c^2}\right)^2 = b^2$	ausmultiplizieren
$h_c^2 + c^2 - 2c\sqrt{a^2 - h_c^2} + a^2 - h_c^2 = b^2$	vereinfachen, Seiten tauschen
$b^2 = c^2 - 2c\sqrt{a^2 - h_c^2} + a^2$	$\sqrt{\ldots}$
$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2c\sqrt{a^2 - h_c^2}}$	

ii) $b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2c\sqrt{a^2 - h_c^{\,2}}}$ Zahlenwerte für a, c und h_c einsetzen

$b = \sqrt{17}$

20. Die Höhe h_c unterteilt das rechtwinklige Dreieck ABC in zwei weitere rechtwinklige Dreiecke. In einem dieser beiden rechtwinkligen Dreiecke ist a die Hypotenuse und h_c die Gegenkathete zum Winkel β:

$\sin(\beta) = \frac{h_c}{a}$ (I)

Im ursprünglichen rechtwinkligen Dreieck ABC gilt:

$\alpha + \beta = 90°$ (II)

$\cos(\beta) = \frac{a}{c}$ (III)

$\tan(\beta) = \frac{b}{a}$ (IV)

Das Gleichungssystem mit den vier Gleichungen (I), (II), (III) und (IV) enthält die vier Unbekannten b, c, α und β.

(I) nach β lösen

$\sin(\beta) = \frac{h_c}{a}$ arcsin(...)

$\beta = \arcsin\left(\frac{h_c}{a}\right)$ Zahlenwerte für h_c und a einsetzen

$\beta = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = 30°$

$\beta = 30°$ in (II) einsetzen und nach α lösen

$\alpha + 30° = 90°$ - 30°

$\alpha = 60°$

$\beta = 30°$ in (III) einsetzen und nach c lösen

$\cos(30°) = \frac{a}{c}$ $\cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{c}$ $\cdot$ c

$c \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a$ $\cdot \frac{2}{\sqrt{3}}$

$c = \frac{2}{\sqrt{3}}a$ Zahlenwert für a einsetzen

$c = \frac{4}{\sqrt{3}}$

$\beta = 30°$ in (IV) einsetzen und nach b lösen

$\tan(30°) = \frac{b}{a}$ $\tan(30°) = \frac{\sin(30°)}{\cos(30°)}$

$\frac{\sin(30°)}{\cos(30°)} = \frac{b}{a}$ $\sin(30°) = \frac{1}{2}$, $\cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{b}{a}$ vereinfachen

$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{b}{a}$ $\cdot$ a

$b = \frac{1}{\sqrt{3}} a$ Zahlenwert für a einsetzen

$b = \frac{2}{\sqrt{3}}$

Zusammenfassung: $b = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $c = \frac{4}{\sqrt{3}}$, $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$

Funktionen

21. a) $f(0)$

$= 3 \cdot 0 - 4$

$= 0 - 4$

$= -4$

$f(-4)$

$= 3 \cdot (-4) - 4$

$= -12 - 4$

$= -16$

b) $0 = f(x) = 3x - 4$

$3x - 4 = 0$ $\quad | + 4$

$3x = 4$ $\quad | : 3$

$x = \frac{4}{3}$

22. a) $x = -1$, Punkt $P(-1|-2)$ auf dem Graf, daher $y = f(-1) = -2$

b) $x = 2$, Punkt $P(2|\approx 2.8)$ auf dem Graf, daher $y = f(2) \approx 2.8$

c) $y = f(x) = 2$, Punkte $P_1(-3|2)$ und $P_2(1|2)$ auf dem Graf, daher $x_1 = -3$ und $x_2 = 1$

d) $y = f(x) = 0$, Punkte $P_1(\approx -2.5|0)$ und $P_2(\approx 0.3|0)$ auf dem Graf, daher $x_1 \approx -2.5$ und $x_2 \approx 0.3$

23. a) allgemeine Funktionsgleichung einer linearen Funktion
$y = f(x) = ax + b$

$P_1(-2|5)$ und $P_2(2|-4)$ auf Graf (Gerade mit Steigung a)

Steigung $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-4 - 5}{2 - (-2)} = \frac{-9}{4} = -\frac{9}{4}$

Funktionsgleichung
$y = f(x) = y = f(x) = -\frac{9}{4}x + b$

$P_1(-2|5)$ auf Graf:
$y = f(-2) = -\frac{9}{4} \cdot (-2) + b = 5$

Bestimmungsgleichung für b
$\frac{9}{2} + b = 5$

Lösung
$b = \frac{1}{2}$

Funktionsgleichung
$y = f(x) = -\frac{9}{4}x + \frac{1}{2}$

b) Schnittpunkt $S_y(0|y)$ auf Graf:
$y = f(0) = -\frac{9}{4} \cdot 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$S_y\left(0\middle|\frac{1}{2}\right)$

c) Schnittpunkt $S_x(x|0)$ auf Graf:
$0 = f(x) = -\frac{9}{4}x + \frac{1}{2}$ mit Lösung $x = \frac{2}{9}$

$S_x\left(\frac{2}{9}\middle|0\right)$

24. a) allgemeine Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion
$y = f(x) = ax^2 + bx + c$

$P_1(1|-1)$ auf Graf:
$y = f(1) = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = -1$

$a + b + c = -1$ (I)

$P_2(2|4)$ auf Graf:
$y = f(2) = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 4$

$4a + 2b + c = 4$ (II)

$P_3(4|8)$ auf Graf:
$y = f(4) = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c = 8$

$16a + 4b + c = 8$ (III)

Das Gleichungssystem mit den drei Gleichungen (I), (II) und (III) enthält die drei Unbekannten a, b und c.

(I) nach c lösen

$a + b + c = -1$ | $- a, - b$

$c = -1 - a - b$ (IV)

(IV) in (II) einsetzen

$4a + 2b + (-1 - a - b) = 4$ | Klammer auflösen, vereinfachen, + 1

$3a + b = 5$ (V)

(IV) in (III) einsetzen

$16a + 4b + (-1 - a - b) = 8$ | Klammer auflösen, vereinfachen, + 1

$15a + 3b = 9$ | : 3

$5a + b = 3$ (VI)

Das Gleichungssystem mit den beiden Gleichungen (V) und (VI) enthält noch die beiden Unbekannten a und b.

(V) nach b lösen

$3a + b = 5$ | $- 3a$

$b = 5 - 3a$ (VII)

in (VI) einsetzen

$5a + (5 - 3a) = 3$ Klammer auflösen, vereinfachen, - 5

$2a = -2$: 2

$a = -1$

rückwärts in (VII) und (IV) einsetzen

$b = 5 - 3\cdot(-1) = 8$

$c = -1 - (-1) - 8 = -8$

Funktionsgleichung
$y = f(x) = -x^2 + 8x - 8$

b) Scheitelpunktsform der Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion
$y = f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$

x_0 und y_0 sind die Koordinaten des Scheitelpunktes des Grafen (Parabel)
Scheitelpunkt $S(x_0|y_0)$

$P_1(1|-8)$ ist Scheitelpunkt:
$x_0 = 1$, $y_0 = -8$

Funktionsgleichung
$y = f(x) = a(x - 1)^2 - 8$

$P_2(2|-7)$ auf Graf:
$y = f(2) = a(2 - 1)^2 - 8 = -7$

$a - 8 = -7$ + 8

$a = 1$

Funktionsgleichung
$y = f(x) = (x - 1)^2 - 8$

25. Scheitelpunktsform der Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion
$y = f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$

Scheitelpunkt $S(1|2)$
$x_0 = 1$, $y_0 = 2$

Funktionsgleichung
$y = f(x) = a(x - 1)^2 + 2$

$P(x_P|y_P)$ liegt auf der Parabel:
$y_P = f(x_P) = a(x_P - 1)^2 + 2$ (I)

$P(x_P|y_P)$ liegt auf der Gerade:
$y_P = 2x_P - 2$ (II)

Das Gleichungssystem mit den beiden Gleichungen (I) und (II) enthält die beiden Unbekannten x_P und y_P sowie den Parameter a. Damit es genau einen Punkt P gibt, muss der Wert von a so sein, dass das Gleichungssystem genau eine Lösung (x_P, y_P) hat.

rechte Seiten von (I) und (II) gleichsetzen

$a(x_P - 1)^2 + 2 = 2x_P - 2$ Binom quadrieren

$a(x_P^2 - 2x_P + 1) + 2 = 2x_P - 2$ ausmultiplizieren

$ax_P^2 - 2ax_P + a + 2 = 2x_P - 2$	$- 2x_P, + 2$
$ax_P^2 - 2ax_P - 2x_P + a + 4 = 0$	x_P ausklammern
$ax_P^2 + (- 2a - 2)x_P + (a + 4) = 0$	Lösungsformel für quadratische Gleichung anwenden
$(x_P)_{1,2} = \frac{-(-2a-2) \pm \sqrt{(-2a-2)^2 - 4 \cdot a \cdot (a+4)}}{2 \cdot a}$ (III)	vereinfachen

Damit es genau eine Lösung gibt, muss der Ausdruck unter der Wurzel gleich null sein.

$(- 2a - 2)^2 - 4a(a + 4) = 0$	ausmultiplizieren
$4a^2 + 8a + 4 - 4a^2 - 16a = 0$	vereinfachen, -4
$-8a = -4$	: (-8)

$a = \frac{1}{2}$

in (III) einsetzen

$x_P = \frac{-\left(-2 \cdot \frac{1}{2} - 2\right)}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 3$

In (II) einsetzen

$y_P = 2 \cdot 3 - 2 = 4$

P(3|4)

26. a) Die Aussage ist wahr. Es gilt $f(-x) = (-x)^n = x^n = f(x)$, falls n eine gerade Zahl ist. Der Graf von f ist also achsensymmetrisch bezüglich der y-Koordinatenachse.

b) Die Aussage ist wahr. Es gilt $f(-x) = (-x)^n = -x^n = - f(x)$, falls n eine ungerade Zahl ist. Der Graf von f ist also punktsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs.

c) Die Aussage ist wahr. Es gilt definitionsgemäss $x^{1/3} := \sqrt[3]{x}$. Die Wurzel aus einer negativen Zahl ist jedoch nicht definiert. Deshalb ist $(-8)^{1/3}$ nicht definiert, und -8 liegt daher nicht in der Definitionsmenge.

d) Die Aussage ist falsch. Es gilt definitionsgemäss $(x + 1)^{-3/4} := \frac{1}{(x+1)^{3/4}} := \frac{1}{\sqrt[4]{(x+1)^3}}$.
Dieser Ausdruck ist definiert, falls $x + 1 > 0$ gilt. Dies ist für $x = 0$ erfüllt. Deshalb ist $f(0)$ definiert, und 0 liegt daher in der Definitionsmenge.

e) Die Aussage ist wahr. Es gilt $a^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Alle Funktionswerte von f sind also positiv. Deshalb liegen alle Punkte des Grafen von f oberhalb der x-Achse.

f) Die Aussage ist wahr. Es gilt $e^{2x} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Alle Funktionswerte von f sind also positiv, also nie gleich null. Deshalb ist die Zahl 0 kein Element der Wertemenge.

g) Die Aussage ist falsch. Es gilt $\sin(x) = 0$, falls $x = \ldots, -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$ Die Stellen $x_k = k \cdot 2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) sind zwar in den genannten x-Werten enthalten. Es sind aber nicht alle Stellen, an welchen $\sin(x) = 0$ gilt.

h) Die Aussage ist falsch. Es gilt $\cos(x) = \sin(x + \pi/2)$ bzw. $\sin(x) = \cos(x - \pi/2)$. Der Graf der Cosinus-Funktion g ist also gegenüber dem Grafen der Sinus-Funktion f um $\pi/2$ in negativer x-Richtung verschoben.

i) Die Aussage ist wahr. Es gilt definitionsgemäss $\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
Wegen $\cos(\pi/2) = 0$ ist $\tan(\pi/2)$ nicht definiert (Division durch null). Daher liegt die Zahl $\pi/2$ nicht in der Definitionsmenge der Tangens-Funktion f.

j) Die Aussage ist wahr. Es gilt $f(-x) = \tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x) = -f(x)$
Der Graf der Tangens-Funktion f ist also punktsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs.

27. a) $g(x) = f(x - 2) = 2\sin(4(x - 2)) = 2\sin(4x - 8)$

b) $g(x) = f(x + 2) = 2\sin(4(x + 2)) = 2\sin(4x + 8)$

c) $g(x) = f(x) + 2 = 2\sin(4x) + 2$

d) $g(x) = f(x) - 2 = 2\sin(4x) - 2$

e) $g(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) = 2\sin\left(4\frac{x}{2}\right) = 2\sin(2x)$

f) $g(x) = f(2x) = 2\sin(4 \cdot 2x) = 2\sin(8x)$

g) $g(x) = 2 \cdot f(x) = 2 \cdot 2\sin(4x) = 4\sin(4x)$

h) $g(x) = \frac{f(x)}{2} = \frac{2\sin(4x)}{2} = \sin(4x)$

28. a) $g(x) = \cos(2x - 6) = \cos(2(x - 3)) = f(x - 3)$

Der Graf von g ist gegenüber dem Grafen von f um 3 Einheiten in postiver x-Richtung verschoben.

b) $g(x) = \cos(2x + 4) = \cos(2(x + 2)) = f(x + 2)$

Der Graf von g ist gegenüber dem Grafen von f um 2 Einheiten in negativer x-Richtung verschoben.

29. a) $f(f(x)) = f(x^2) = (x^2)^2 = x^4$

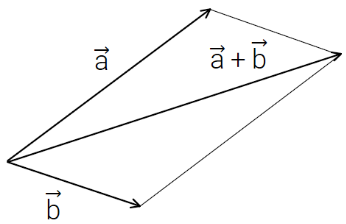
b) $g(g(x)) = g(2x - 1) = 2(2x - 1) - 1 = 4x - 3$

c) $f(g(x)) = f(2x - 1) = (2x - 1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$

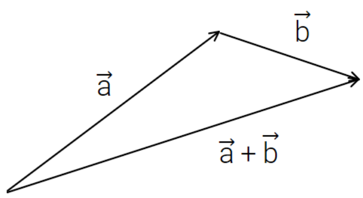
d) $g(f(x)) = g(x^2) = 2x^2 - 1$

Vektoren

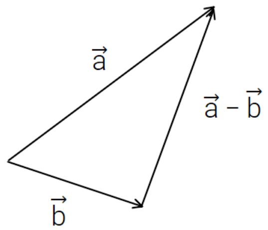
30. a) $\vec{a} + \vec{b}$



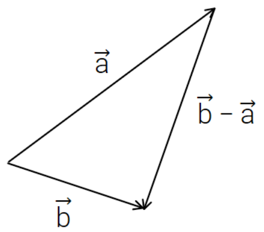
oder



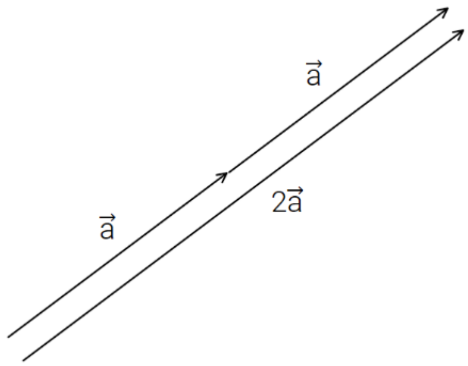
b) $\vec{a} - \vec{b}$



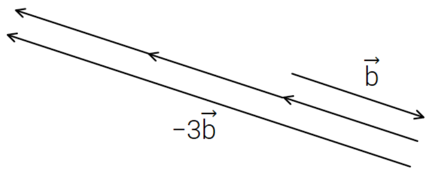
c) $\vec{b} - \vec{a}$



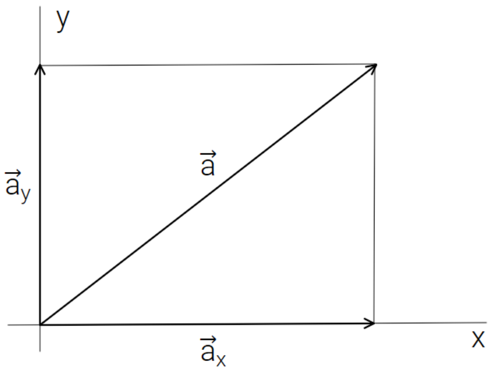
d) $2\vec{a}$



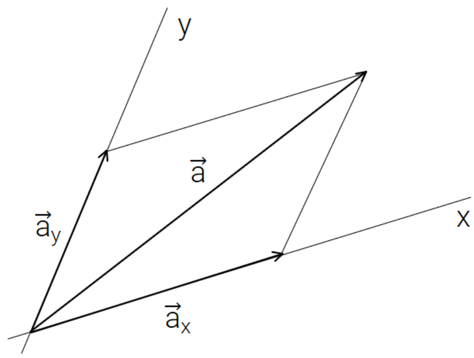
e) $-3\vec{b}$



31. a)



b)



32. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

a) $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 \\ -2+1 \\ 2+(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-0 \\ -2-1 \\ 2-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

c) $2\vec{a} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 \\ 2\cdot(-2) \\ 2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$

d) $-3\vec{b} = -3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\cdot 0 \\ -3\cdot 1 \\ -3\cdot(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$

e) $-3\vec{a} + 4\vec{b} = -3\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\cdot 1 \\ -3\cdot(-2) \\ -3\cdot 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4\cdot 0 \\ 4\cdot 1 \\ 4\cdot(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -3+0 \\ 6+4 \\ -6+(-12) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ -18 \end{pmatrix}$

f) $|\vec{a}| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$

g) $\left|\vec{a} - 2\vec{b}\right| = \left|\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}0\\1\\-3\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\cdot 0\\2\cdot 1\\2\cdot(-3)\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\2\\-6)\end{pmatrix}\right|$

$= \left|\begin{pmatrix}1-0\\-2-2\\2-(-6)\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}1\\-4\\8\end{pmatrix}\right| = \sqrt{1^2 + (-4)^2 + 8^2} = \sqrt{81} = 9$

33. $\vec{c} = r\cdot\vec{a} + s\cdot\vec{b}$

$$\begin{pmatrix}5\\-7\\4\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}r\cdot 1\\r\cdot(-1)\\r\cdot 2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}s\cdot(-1)\\s\cdot 2\\s\cdot 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}r\\-r\\2r\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-s\\2s\\s\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}r-s\\-r+2s\\2r+s\end{pmatrix}$$

Diese vektorielle Gleichung muss in jeder Komponente erfüllt sein. Dies ergibt drei skalare Gleichungen:

$5 = r - s$ (I)
$-7 = -r + 2s$ (II)
$4 = 2r + s$ (III)

Das Gleichungssystem mit den drei Gleichungen (I), (II) und (III) enthält die beiden Unbekannten r und s.

(I) nach r lösen

$5 = r - s$ + s, Seiten tauschen

$r = 5 + s$ (IV)

in (II) einsetzen

$-7 = -(5 + s) + 2s$

$= -5 + s$ + 5, Seiten tauschen

$s = -2$

in (IV) einsetzen

$r = 5 + (-2) = 3$

nachprüfen, ob (r, s) = (3, -2) auch Lösung von (III) ist

$2r + s = 2\cdot 3 + (-2) = 4$ also (III) erfüllt

Also: $r = 3$, $s = -2$, $\vec{c} = 3\cdot\vec{a} - 2\cdot\vec{b}$