Mathematik-Vorkenntnisse: Testaufgaben

Thomas Borer, Dipl. Phys. ETH, Professor für Mathematik und Physik
thomas.borer@fhgr.ch

2.7.2024

Für die Mathematik-Module in den technischen Bachelor-Studienangeboten (Photonics, Mobile Robotics, Computational and Data Science, Aritificial Intelligence in Software Engineering, Bauingenieurwesen) der Fachhochschule Graubünden werden die folgenden Vorkenntnisse vorausgesetzt:

Terme
- die Grundrechenarten kennen und ausführen können.
- Terme algebraisch umformen und vereinfachen können.
- Terme ausmultiplizieren und faktorisieren können.
- die binomischen Formeln kennen und anwenden können.
- Brüche kürzen und erweitern können.
- Bruchterme algebraisch umformen und vereinfachen können.
- die Potenzgesetze kennen und für Potenzen mit ganzzahligen oder rationalen Exponenten anwenden können.
- Definitionsbereiche von Termen bestimmen können.

Mengen
- wissen und verstehen, was eine Menge ist.
- die Grundbegriffe der Mengenlehre kennen und verstehen.
- die Grundoperationen der Mengenlehre kennen und ausführen können.

Gleichungen
- lineare Gleichungen mit einer Unbekannten lösen können.
- lineare Ungleichungen mit einer Unbekannten lösen können.
- einfache quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten ohne Lösungsformel lösen können.
- die Lösungsformel für quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten kennen.
- quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten mit Hilfe der Lösungsformel lösen können.
- einfache goniometrische Gleichungen mit einer Unbekannten lösen können.
- einfache Exponentialgleichungen mit einer Unbekannten lösen können.
- einfache Gleichungssysteme lösen können.

Geometrie/Trigonometrie
- den Satz von Pythagoras kennen und in einfachen Problemstellungen anwenden können.
- die trigonometrischen Grundbeziehungen am rechtwinkligen Dreieck kennen und in einfachen Problemstellungen anwenden können.

Funktionen
- aus der Funktionsgleichung einer einfachen Funktion Funktionswerte berechnen können.
- den Grafen als Darstellung einer Funktion kennen und verstehen.
- aus dem Grafen einer einfachen Funktion Funktionswerte und spezielle Punkte des Grafen herauslesen können.
- wissen und verstehen, was eine lineare Funktion ist.
- wissen und verstehen, was eine quadratische Funktion ist.
- wissen und verstehen, was die Definitionsmenge und die Wertemenge einer Funktion ist.
- wissen und verstehen, was eine Potenzfunktion mit einem natürlichen, ganzen oder rationalen Exponenten ist.
- wissen und verstehen, was eine Exponentialfunktion ist.

- die elementaren trigonometrischen Funktion kennen und verstehen.
- die Grafen aller genannten Funktionstypen kennen und verstehen.
- einfache Problemstellungen rund um Grafen der genannten Funktionstypen bearbeiten können.
- den Zusammenhang zwischen Verschiebungen und Skalierungen von Funktionsgrafen und den entsprechenden Operationen auf die Funktionsgleichungen kennen und verstehen.
- einfache Problemstellungen zu Verschiebungen und Skalierungen von Funktionsgrafen bearbeiten können.
- wissen und verstehen, was eine Verkettung von Funktionen ist.
- einfache Problemstellungen zur Verkettung von Funktionen bearbeiten können.

Vektoren
- wissen und verstehen, was ein Vektor ist.
- die Grundrechenarten der Vektorrechnung kennen und sowohl ohne Koordinaten als auch in kartesischen Koordinaten ausführen können.
- die Grundrechenarten der Vektorrechnung in einfachen Problemstellungen anwenden können.

Konkret wird erwartet, dass die folgenden Testaufgaben ohne Hilfsmittel (Rechner, Formelsammlung, usw.) gelöst werden können:

Testaufgaben

Terme

1. Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:
   a) $2 + 3 \cdot 4$
   b) 3^{-2}
   c) -2^4
   d) $\sqrt{16}$

2. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:
   a) $7x - 5z + 10y + 3y + 8z - 4x$
   b) $(32m + 13q) - (14m + 7q)$
   c) $(15a - 2b) - (7a - (2a + b))$
   d) $5a^2b \cdot 4ab \cdot 3a^2b$
   e) $(x^3 - x^2y + xy^2 - y^3)(x + y)$

3. Multiplizieren Sie die folgenden Ausdrücke aus:
   a) $(p + q)^2$
   b) $(2x + 3y)^2$
   c) $(x - y)^2$
   d) $(2a - 3ax)^2$
   e) $(a + 2)(a - 2)$
   f) $(5xy + 3xz)(5xy - 3xz)$

4. Faktorisieren Sie die folgenden Ausdrücke:

a) $5a^2 - 10a^3 - 25a^4$

b) $3a(x - a)^2 + 12a^2(x - a)$

5. Vereinfachen Sie die folgenden Brüche durch Kürzen:

a) $\frac{14a}{18ab}$

b) $\frac{ab}{a^2b^2c}$

c) $\frac{8ab}{4a^2 - 4ab}$

d) $\frac{p^2 + p}{p^2 - 1}$

e) $\frac{x - y}{y - x}$

6. Bringen Sie die folgenden Brüche auf den Nenner $10a^2b^2x$:

a) $\frac{4y}{2a^2x}$

b) $\frac{5}{2ax}$

7. Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke als einen einzigen Bruch:

a) $\frac{9x}{5} - \frac{6x}{5}$

b) $\frac{7x - 3y}{a} - \frac{2x + 5y}{a}$

c) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3}$

d) $\frac{a}{b} - \frac{c}{ab}$

e) $\frac{a}{a - b} - \frac{b}{a^2 - b^2}$

f) $\frac{t + 7}{3t - 6} - \frac{t + 4}{t^2 - 2t}$

8. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

a) $6 \cdot \frac{5}{12}$

b) $\frac{3}{4a} \cdot \frac{2}{9b}$

c) $\frac{d - 1}{18d} \cdot \frac{12d^2}{1 - d}$

d) $\frac{12pqr}{2pr}$

e) $\frac{16ab + 12aq}{4a}$

f) $\frac{30a^4b^3c^2}{5a^2bc}$

g) $\frac{-2x^2-4x}{-2x}$

h) $\frac{\frac{ax}{c}}{a}$

i) $\frac{\frac{a}{b^2}}{\frac{a^2}{b}}$

j) $\frac{x}{\frac{1}{y}}$

k) $\frac{r^2+\frac{1}{r}}{r+\frac{1}{r^2}}$

9. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke und schreiben Sie die Ergebnisse ohne Brüche:

a) $\frac{\left(a^2b^3a^4\right)^5}{\left(b^2a^3b^5\right)^2}$

b) $\left(\frac{a^{-1}b^2}{a^{-3}b^4}\right)^{-5}$

c) $\left(\frac{a^{1/2}\,b}{a^{-1/3}\,b^{11/8}}\right)^{-24/5}$

10. Bestimmen Sie alle reellen Zahlen x, für welche die folgenden Ausdrücke **nicht** definiert sind:

a) $x^2 - 7$

b) $\frac{1}{x+2}$

c) $\sqrt{x+3}$

d) $\frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$

Mengen

11. Gegeben sind die folgenden Mengen:

A = {1, 3, 5, 7}
B = {2, 4, 6, 8}
C = {2, 3, 4, 5}

Bestimmen Sie die folgenden Mengen:

a) $B \cup C$

b) $B \cap C$

c) $(A \cup B) \setminus C$

12. Gegeben sind die folgenden Mengen:

A = Menge aller Städte der Welt
B = Menge aller europäischen Städte
C = Menge aller Städte der Welt, die am Meer liegen

Beurteilen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

a) Paris $\in$ B

b) Sydney $\notin$ C

c) B $\subset$ A

d) A $\cap$ B = B

e) B $\cap$ C = { }

Gleichungen

13. Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungen nach der Unbekannten x:

a) $22(x - 11) - 5(x - 40) = 110 - (x + 53)$

b) $\frac{45}{2x - 9} - 2 = -\frac{27}{9 - 2x}$

c) $\frac{x}{x - 1} - \frac{x - 1}{x - 2} = 0$

d) $2a + cx = c - x$
Berücksichtigen Sie, dass die Parameter a und c beliebige reelle Zahlen sein können.

e) $2|x| = |x - 5| + 1$

14. Lösen Sie die folgenden linearen Ungleichungen nach der Unbekannten x:

a) $2(x - 1) - 5(x - 4) < 10 - (x + 5)$

b) $\frac{1}{x - 2} < \frac{3}{x + 1}$

15. Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen nach der Unbekannten x:

a) $2x^2 + 2x = 0$ (ohne Lösungsformel)

b) $4(x - 2)^2 - 36 = 0$ (ohne Lösungsformel)

c) $2x^2 - 7x + 3 = 0$

d) $x^2 - 6x + 9 = 0$

e) $5x^2 - 8x + 4 = 0$

f) $\frac{x - 4}{x - 5} = \frac{30 - x^2}{x^2 - 5x}$

16. Lösen Sie die folgenden goniometrischen Gleichungen nach der Unbekannten x:

a) $\sin(x) = \frac{1}{2}$

b) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

c) $\cos^2(x) = 1 - \sin(x)$

17. Lösen Sie die folgenden Exponentialgleichungen nach der Unbekannten x:

a) $10^x = 1000$

b) $3^x = 81$

c) $2^x = \frac{1}{16}$

d) $e^{3x} = 4$

e) $e^{2x} + e^x = 2$

18. Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme nach den Unbekannten x und y auf:

a)
$4x + 3y = 14$ (I)
$2x - y = 12$ (II)

b)
$x + 2y = 3$ (I)
$4x + y^2 = 5$ (II)

Geometrie/Trigonometrie

19. In einem Dreieck ABC werden die Seiten und deren Längen mit a, b und c bezeichnet. Die Seite a liegt der Ecke A gegenüber, b liegt B gegenüber, und c liegt C gegenüber. Die Höhen und deren Längen werden mit h_a, h_b und h_c bezeichnet.

a) Das Dreieck ist **rechtwinklig**. a und b sind die Katheten, c ist die Hypotenuse.
Bekannt sind a und c.

Bestimmen Sie **ohne Trigonometrie** die Länge der Seite b …

i) … algebraisch, d.h. ohne konkrete Zahlenwerte für a und c.

ii) … numerisch (Zahlenwerte: a = 5, c = 13).

b) Das Dreieck ist **nicht rechtwinklig**.
Bekannt sind a, c und h_c.

Bestimmen Sie **ohne Trigonometrie** die Länge der Seite b …

i) … algebraisch, d.h. ohne konkrete Zahlenwerte für a, c und h_c.

ii) … numerisch (Zahlenwerte: a = 5, c = 4, h_c = 4).

20. In einem **rechtwinkligen** Dreieck ABC werden die Seiten und deren Längen mit a, b und c bezeichnet. Die Kathete a liegt der Ecke A gegenüber, die Kathete b liegt B gegenüber, und die Hypotenuse c liegt C gegenüber.

Die Innenwinkel und deren Werte werden mit α, β und γ bezeichnet. α liegt bei der Ecke A, β bei B und γ ($\gamma = 90°$) bei C.

Die Höhen und deren Längen werden mit h_a, h_b und h_c bezeichnet.

Bekannt sind a und h_c (Zahlenwerte: a = 2, h_c = 1).

Bestimmen Sie **mit Trigonometrie** die Längen der Seiten b und c sowie die Werte der Innenwinkel α und β.

Funktionen

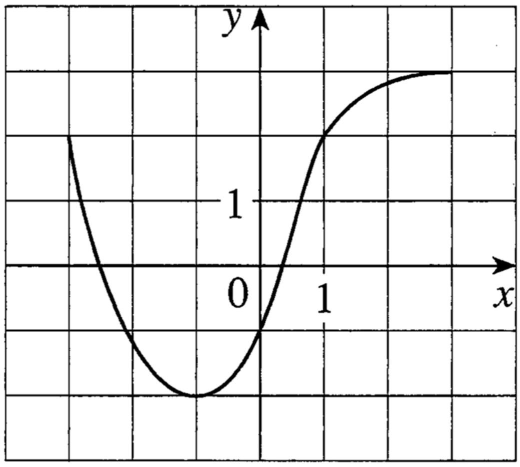
21. Gegeben ist die Funktionsgleichung der Funktion f:

$y = f(x) = 3x - 4$

a) Bestimmen Sie f(0) und f(-4).

b) Bestimmen Sie alle x, für welche f(x) = 0 gilt.

22. Die Funktion f ist definiert auf dem Intervall $-3 \le x \le 3$. Gegeben ist der Graf von f:



a) Bestimmen Sie f(-1).

b) Schätzen Sie f(2) ab.

c) Bestimmen Sie alle Werte für x, für welche f(x) = 2 gilt.

d) Schätzen Sie alle Werte für x ab, für welche f(x) = 0 gilt.

23. Der Graf einer linearen Funktion f enthält die beiden Punkte $P_1(-2|5)$ und $P_2(2|-4)$.

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von f.

b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt des Grafen von f mit der y-Achse.

c) Bestimmen Sie den Schnittpunkt des Grafen von f mit der x-Achse.

24. Der Graf einer quadratischen Funktion f enthält …

a) … die drei Punkte $P_1(1|-1)$, $P_2(2|4)$ und $P_3(4|8)$.
Bestimmen Sie die allgemeine Form der Funktionsgleichung von f.

b) … die beiden Punkte $P_1(1|-8)$ und $P_2(2|-7)$, wobei P_1 der Scheitelpunkt des Grafen ist.
Bestimmen Sie die Scheitelpunktsform der Funktionsgleichung von f.

25. Der Graf einer quadratischen Funktion f hat den Scheitelpunkt S(1|2) und berührt die Gerade $y = 2x - 2$ genau in einem Punkt P.

Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes P.

26. Beurteilen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

a) Der Graf der Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto y = f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$ ist achsensymmetrisch bezüglich der y-Koordinatenachse, falls n eine gerade Zahl ist.

b) Der Graf der Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto y = f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$ ist punktsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs, falls n eine ungerade Zahl ist.

c) Bei der Funktion $f: D \to \mathbb{R}, x \mapsto y = f(x) = x^{1/3}$ ist die Zahl -8 kein Element der Definitionsmenge D.

d) Bei der Funktion f: $D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y = f(x) = (x + 1)^{-3/4}$ ist die Zahl 0 kein Element der Definitionsmenge D.

e) Der Graf der Funktion f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y = f(x) = a^x$ ($a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$) verläuft vollständig oberhalb der x-Koordinatenachse.

f) Bei der Funktion f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y = f(x) = e^{2x}$ ist die Zahl 0 kein Element der Wertemenge.

g) Der Graf der Funktion f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y = f(x) = \sin(x)$ schneidet die x-Koordinatenachse genau an den Stellen $x_k = k \cdot 2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

h) Der Graf der Funktion f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y = f(x) = \cos(x)$ ist gegenüber dem Grafen der Funktion g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y = g(x) = \sin(x)$ um $\pi/2$ in positiver x-Richtung verschoben.

i) Bei der Funktion f: $D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y = f(x) = \tan(x)$ ist die Zahl $\pi/2$ kein Element der Defintionsmenge D.

j) Der Graf der Funktion f: $D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y = f(x) = \tan(x)$ ist punktsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs.

27. Gegeben ist die Funktion f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y = f(x) = 2 \sin(4x)$

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Funktion g, deren Graf gegenüber dem Grafen von f …

a) … um 2 Einheiten in positiver x-Richtung verschoben ist.

b) … um 2 Einheiten in negativer x-Richtung verschoben ist.

c) … um 2 Einheiten in positiver y-Richtung verschoben ist.

d) … um 2 Einheiten in negativer y-Richtung verschoben ist.

e) … bezüglich des Koordinatenursprungs um den Faktor 2 in x-Richtung gestreckt ist.

f) … bezüglich des Koordinatenursprungs um den Faktor 2 in x-Richtung gestaucht ist.

g) … bezüglich des Koordinatenursprungs um den Faktor 2 in y-Richtung gestreckt ist.

h) … bezüglich des Koordinatenursprungs um den Faktor 2 in y-Richtung gestaucht ist.

28. Gegeben ist die Funktion f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y = f(x) = \cos(2x)$

Bestimmen Sie, um wieviele Einheiten der Graf der Funktion g gegenüber dem Grafen von f in x-Richtung verschoben ist.

a) g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y = g(x) = \cos(2x - 6)$

b) g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y = g(x) = \cos(2x + 4)$

29. Gegeben sind die Funktionen f und g:

f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y = f(x) = x^2$
g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y = g(x) = 2x - 1$

Bestimmen Sie die folgenden Ausdrücke:

a) $f(f(x))$

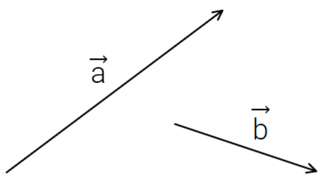
b) $g(g(x))$

c) $f(g(x))$

d) $g(f(x))$

Vektoren

30. Die folgenden beiden Pfeile repräsentieren die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:



Konstruieren Sie die Pfeile, welche die folgenden Vektoren repräsentieren:

a) $\vec{a} + \vec{b}$

b) $\vec{a} - \vec{b}$

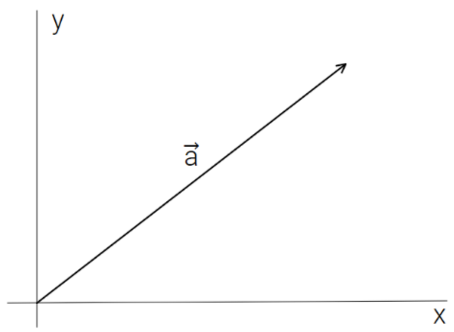
c) $\vec{b} - \vec{a}$

d) $2\vec{a}$

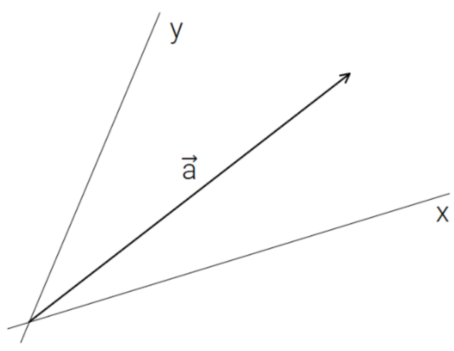
e) $-3\vec{b}$

31. Zerlegen Sie den Vektor $\vec{a}$ in zwei Komponenten $\vec{a}_x$ und $\vec{a}_y$, d.h. $\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$. Die Komponente $\vec{a}_x$ soll in Richtung der x-Achse und die Komponente $\vec{a}_y$ in Richtung der y-Achse zeigen.

a)



b)



32. Gegeben sind die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

a) $\vec{a} + \vec{b}$

b) $\vec{a} - \vec{b}$

c) $2\vec{a}$

d) $-3\vec{b}$

e) $-3\vec{a} + 4\vec{b}$

f) $|\vec{a}|$

g) $|\vec{a} - 2\vec{b}|$

33. Gegeben sind die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Der Vektor $\vec{c}$ soll als sogenannte Linearkombination der beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ausgedrückt werden, d.h. es soll gelten:

$$\vec{c} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}$$

Bestimmen Sie die beiden Koeffizienten r und s.