**Fachhochschule Graubünden**
University of Applied Sciences

# Mathematik-Vorkenntnisse: Langlösungen

Thomas Borer, Dipl. Phys. ETH, Professor für Mathematik und Physik
thomas.borer@fhgr.ch

8.6.2023

## Langlösungen zu den Testaufgaben

### Terme

1. a) $2 + 3 \cdot 4$
$= 2 + (3 \cdot 4)$
$= 2 + 12$
$= 14$

b) $3^{-2}$
$= \frac{1}{3^2}$
$= \frac{1}{9}$

c) $-2^4$
$= -(2^4)$
$= -16$

d) $\sqrt{16}$
$= 4$ (nur 4, nicht $\pm 4$)

2. a) $7x - 5z + 10y + 3y + 8z - 4x$ — Summanden ordnen nach x, y und z
$= 7x - 4x + 10y + 3y - 5z + 8z$
$= (7x - 4x) + (10y + 3y) + (-5z + 8z)$
$= 3x + 13y + 3z$

b) $(32m + 13q) - (14m + 7q)$ — Klammern auflösen
$= 32m + 13q - 14m - 7q$
$= 32m - 14m + 13q - 7q$
$= (32m - 14m) + (13q - 7q)$
$= 18m + 6q$

| | | | |
|---|---|---|---|
| | c) | $(15a - 2b) - (7a - (2a + b))$ | Klammer $(2a + b)$ auflösen |
| | | $= 15a - 2b - (7a - 2a - b)$ | Klammer auflösen |
| | | $= 15a - 2b - 7a + 2a + b$ | Summanden ordnen nach a und b |
| | | $= 15a - 7a + 2a - 2b + b$ | |
| | | $= (15a - 7a + 2a) + (- 2b + b)$ | |
| | | $= 10a + (- b)$ | |
| | | $= 10a - b$ | |
| | d) | $5a^2b \cdot 4ab \cdot 3a^2b$ | Faktoren ordnen |
| | | $= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot a^2 \cdot a \cdot a^2 \cdot b \cdot b \cdot b$ | |
| | | $= 60 \cdot a^5 \cdot b^3$ | |
| | | $= 60a^5b^3$ | |
| | e) | $(x^3 - x^2y + xy^2 - y^3)(x + y)$ | ausmultiplizieren |
| | | $= x^3x + x^3y - x^2yx - x^2yy + xy^2x + xy^2y - y^3x - y^3y$ | |
| | | $= x^4 + x^3y - x^3y - x^2y^2 + x^2y^2 + xy^3 - xy^3 - y^4$ | |
| | | $= x^4 + 0 + 0 + 0 - y^4$ | |
| | | $= x^4 - y^4$ | |
| 3. | a) | $(p + q)^2$ | 1. Binomische Formel anwenden |
| | | $= p^2 + 2pq + q^2$ | |
| | b) | $(2x + 3y)^2$ | 1. Binomische Formel anwenden |
| | | $= (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3y + (3y)^2$ | |
| | | $= 4x^2 + 12xy + 9y^2$ | |
| | c) | $(x - y)^2$ | 2. Binomische Formel anwenden |
| | | $= x^2 - 2xy + y^2$ | |
| | d) | $(2a - 3ax)^2$ | 2. Binomische Formel anwenden |
| | | $= (2a)^2 - 2 \cdot 2a \cdot 3ax + (3ax)^2$ | |
| | | $= 4a^2 - 12a^2x + 9a^2x^2$ | |
| | e) | $(a + 2)(a - 2)$ | 3. Binomische Formel anwenden |
| | | $= a^2 - 4$ | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | f) | $(5xy + 3xz)(5xy - 3xz)$ | 3. Binomische Formel anwenden |
| | | $= (5xy)^2 - (3xz)^2 = 25x^2y^2 - 9x^2z^2$ | |
| 4. | a) | $5a^2 - 10a^3 - 25a^4$ | gemeinsamen Faktor $5a^2$ ausklammern |
| | | $= 5a^2(1 - 2a - 5a^2)$ | |
| | b) | $3a(x - a)^2 + 12a^2(x - a)$ | gemeinsamen Faktor $3a(x - a)$ ausklammern |
| | | $= 3a(x - a)((x - a) + 4a)$ | |
| | | $= 3(x - a)(x - a + 4a)$ | |
| | | $= 3a(x - a)(x + 3a)$ | |
| 5. | a) | $\frac{14a}{18ab}$ | Zähler und Nenner faktorisieren |
| | | $= \frac{2 \cdot 7 \cdot a}{2 \cdot 9 \cdot ab}$ | Bruch durch Faktoren 2 und a kürzen |
| | | $= \frac{7}{9b}$ | |
| | b) | $\frac{ab}{a^2b^2c}$ | Bruch durch Faktoren a und b kürzen |
| | | $= \frac{1}{abc}$ | |
| | c) | $\frac{8ab}{4a^2 - 4ab}$ | Zähler und Nenner faktorisieren |
| | | $= \frac{2 \cdot 4 \cdot ab}{4a(a - b)}$ | Bruch durch Faktoren 4 und a kürzen |
| | | $= \frac{2b}{a - b}$ | |
| | d) | $\frac{p^2 + p}{p^2 - 1}$ | Zähler und Nenner faktorisieren |
| | | | im Nenner 3. Binomische Formel anwenden |
| | | $= \frac{p(p + 1)}{(p + 1)(p - 1)}$ | Bruch durch Faktor p + 1 kürzen |
| | | $= \frac{p}{p - 1}$ | |
| | e) | $\frac{x - y}{y - x}$ | im Nenner Faktor -1 ausklammern |
| | | $= \frac{x - y}{-(x - y)}$ | Bruch durch Faktor x - y kürzen |
| | | $= \frac{1}{-1}$ | |

$= -1$

6. a) $\frac{4y}{2a^2x}$ — Bruch mit Faktor $5b^2$ erweitern

$= \frac{4y \cdot 5b^2}{2a^2x \cdot 5b^2}$

$= \frac{20b^2y}{10a^2b^2x}$

b) $\frac{5}{2ax}$ — Bruch mit Faktor $5ab^2$ erweitern

$= \frac{5 \cdot 5ab^2}{2ax \cdot 5ab^2}$

$= \frac{25ab^2}{10a^2b^2x}$

7. a) $\frac{9x}{5} - \frac{6x}{5}$

$= \frac{9x - 6x}{5}$

$= \frac{3x}{5}$

b) $\frac{7x - 3y}{a} - \frac{2x + 5y}{a}$

$= \frac{(7x - 3y) - (2x + 5y)}{a}$

$= \frac{7x - 3y - 2x - 5y}{a}$

$= \frac{5x - 8y}{a}$

c) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3}$

Brüche gleichnamig machen:
kleinster gemeinsamer Nenner = 6

ersten Bruch mit 3 erweitern

zweiten Bruch mit 2 erweitern

$= \frac{x \cdot 3}{2 \cdot 3} + \frac{x \cdot 2}{3 \cdot 2}$

$= \frac{3x}{6} + \frac{2x}{6}$

$= \frac{3x + 2x}{6}$

$= \frac{5x}{6}$

d) $\frac{a}{b} - \frac{c}{ab}$

Brüche gleichnamig machen:
kleinster gemeinsamer Nenner = ab

ersten Bruch mit a erweitern

$= \frac{a \cdot a}{b \cdot a} - \frac{c}{ab}$

$= \frac{a^2}{ab} - \frac{c}{ab}$

$= \frac{a^2 - c}{ab}$

e) $\frac{a}{a - b} - \frac{b}{a^2 - b^2}$

Brüche gleichnamig machen:
Nenner faktorisieren

im zweiten Nenner 3. Binomische Formel anwenden

$= \frac{a}{a - b} - \frac{b}{(a + b)(a - b)}$

Brüche gleichnamig machen:
kleinster gemeinsamer Nenner $= (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

ersten Bruch mit a + b erweitern

$= \frac{a(a + b)}{(a - b)(a + b)} - \frac{b}{(a + b)(a - b)}$

$= \frac{a(a + b) - b}{(a + b)(a - b)}$

$= \frac{a^2 + ab - b}{a^2 - b^2}$

f) $\frac{t + 7}{3t - 6} - \frac{t + 4}{t^2 - 2t}$

Brüche gleichnamig machen:
Nenner faktorisieren

$= \frac{t + 7}{3(t - 2)} - \frac{t + 4}{t(t - 2)}$

Brüche gleichnamig machen:
kleinster gemeinsamer Nenner $= 3t(t - 2)$

ersten Bruch mit t erweitern

zweiten Bruch mit 3 erweitern

$= \frac{(t + 7) \cdot t}{3(t - 2) \cdot t} - \frac{(t + 4) \cdot 3}{t(t - 2) \cdot 3}$

$= \frac{t^2 + 7t}{3t(t - 2)} - \frac{3t + 12}{3t(t - 2)}$

$= \frac{(t^2 + 7t) - (3t + 12)}{3t(t - 2)}$

$= \frac{t^2 + 7t - 3t - 12)}{3t(t - 2)}$

$= \frac{t^2 + 4t - 12)}{3t(t - 2)}$

Zähler faktorisieren

$= \frac{(t + 6)(t - 2)}{3t(t - 2)}$

Bruch durch Faktor t - 2 kürzen

$= \frac{t + 6}{3t}$

8. a) $6 \cdot \frac{5}{12}$

$= \frac{6 \cdot 5}{12}$

$= \frac{6 \cdot 5}{6 \cdot 2}$

$= \frac{5}{2}$

b) $\frac{3}{4a} \cdot \frac{2}{9b}$

$= \frac{3 \cdot 2}{4a \cdot 9b}$

$= \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot a \cdot 3 \cdot 3 \cdot b}$

$= \frac{1}{2 \cdot a \cdot 3 \cdot b}$

$= \frac{1}{6ab}$

c) $\frac{d - 1}{18d} \cdot \frac{12d^2}{1 - d}$

$= \frac{(d - 1) \cdot 12d^2}{18d(1 - d)}$

$= \frac{2 \cdot 6 \cdot (d - 1)d^2}{- 3 \cdot 6 \cdot d(d - 1)}$

$= \frac{2d}{- 3}$

$= - \frac{2d}{3}$

d) $\frac{12pqr}{2pr}$

$= \frac{2 \cdot 6 \cdot pqr}{2pr}$

$= \frac{6q}{1}$

$= 6q$

e) $\frac{16ab + 12aq}{4a}$

$= \frac{4a(4b + 3q)}{4a}$

$= \frac{4b + 3q}{1}$

$= 4b + 3q$

f) $\frac{30a^4b^3c^2}{5a^2bc}$

$= \frac{5 \cdot 6 \cdot a^4b^3c^2}{5a^2bc}$

$= \frac{6a^2b^2c}{1}$

$= 6a^2b^2c$

g) $\frac{-2x^2 - 4x}{-2x}$

$= \frac{-2x(x+2)}{-2x}$

$= \frac{x+2}{1}$

$= x + 2$

h) $\frac{\frac{ax}{c}}{a}$

$= \frac{\frac{ax}{c}}{\frac{a}{1}}$

$= \frac{ax}{c} \cdot \frac{1}{a}$

$= \frac{ax}{ac}$

$= \frac{x}{c}$

i) $\frac{\frac{a}{b^2}}{\frac{a^2}{b}}$

$= \frac{a}{b^2} \cdot \frac{b}{a^2}$

$= \frac{ab}{a^2b^2}$

$= \frac{1}{ab}$

j) $\frac{x}{\frac{1}{y}}$

$= \frac{\frac{x}{1}}{\frac{1}{y}}$

$= \frac{x}{1} \cdot \frac{y}{1}$

$= \frac{xy}{1}$

$= xy$

k) $\frac{r^2 + \frac{1}{r}}{r + \frac{1}{r^2}}$

$= \frac{\frac{r^2}{1} + \frac{1}{r}}{\frac{r}{1} + \frac{1}{r^2}}$

$$= \frac{\frac{r^2 \cdot r}{1 \cdot r} + \frac{1}{r}}{\frac{r \cdot r^2}{1 \cdot r^2} + \frac{1}{r^2}}$$

$$= \frac{\frac{r^3}{r} + \frac{1}{r}}{\frac{r^3}{r^2} + \frac{1}{r^2}}$$

$$= \frac{\frac{r^3+1}{r}}{\frac{r^3+1}{r^2}}$$

$$= \frac{r^3+1}{r} \cdot \frac{r^2}{r^3+1}$$

$$= \frac{(r^3+1)r^2}{r(r^3+1)}$$

$$= r$$

9. a) $$\frac{\left(a^2b^3a^4\right)^5}{\left(b^2a^3b^5\right)^2}$$

$$= \frac{(a^2)^5(b^3)^5(a^4)^5}{(b^2)^2(a^3)^2(b^5)^2}$$

$$= \frac{a^{2\cdot 5}b^{3\cdot 5}a^{4\cdot 5}}{b^{2\cdot 2}a^{3\cdot 2}b^{5\cdot 2}}$$

$$= \frac{a^{10}b^{15}a^{20}}{b^4a^6b^{10}}$$

$$= \frac{a^{30}b^{15}}{a^6b^{14}}$$

$$= a^{24}b$$

b) $$\left(\frac{a^{-1}b^2}{a^{-3}b^4}\right)^{-5}$$

$$= \left(\frac{a^3b^2}{ab^4}\right)^{-5}$$

$$= \left(\frac{a^2}{b^2}\right)^{-5}$$

$$= \frac{(a^2)^{-5}}{(b^2)^{-5}}$$

$$= \frac{a^{2\cdot(-5)}}{b^{2\cdot(-5)}}$$

$$= \frac{a^{-10}}{b^{-10}}$$

$$= a^{-10}b^{10}$$

10. a) $x^2$ ist für alle reellen Zahlen x definiert. Und eine beliebige reelle Zahl kann von einer beliebigen reellen Zahl subtrahiert werden. Daher ist der Ausdruck für alle reellen Zahlen x definiert.

b) Die Division durch null ist nicht definiert. Der Nenner darf also nicht null sein. Daher ist der Ausdruck nicht definiert für $x = -2$.

c) Die Wurzel aus einer negativen reellen Zahl ist nicht definiert. Der Term unter der Wurzel darf also nicht kleiner als null sein. Daher ist der Ausdruck nicht definiert für $x < -3$.

d) Die Division durch null ist nicht definiert. Und die Wurzel aus einer negativen reellen Zahl ist nicht definiert. Der Term unter der Wurzel muss also grösser als null sein. $x^2$ muss folglich grösser als 4 sein. Dies bedeutet, dass x grösser als 2 oder kleiner als -2 sein muss. Daher ist der Ausdruck nicht definiert für $-2 \leq x \leq 2$.

Gleichungen

11. a)

| | |
|---|---|
| $22(x - 11) - 5(x - 40) = 110 - (x + 53)$ | ausmultiplizieren |
| $22x - 242 - (5x - 200) = 110 - (x + 53)$ | Klammern auflösen |
| $22x - 242 - 5x + 200 = 110 - x - 53$ | auf beiden Seiten vereinfachen |
| $17x - 42 = 57 - x$ | + x, + 42 |
| $18x = 99$ | : 18 |
| $x = \frac{99}{18}$ | |
| $= \frac{9 \cdot 11}{9 \cdot 2}$ | |
| $= \frac{11}{2}$ | |

b)

| | |
|---|---|
| $2a + cx = c - x$ | + x, - 2a |
| $cx + x = c - 2a$ | links x ausklammern |
| $x(c + 1) = c - 2a$ | : (c + 1) |
| $x = \frac{c - 2a}{c + 1}$ | |

c)

| | |
|---|---|
| $\frac{45}{2x - 9} - 2 = -\frac{27}{9 - 2x}$ | Nenner faktorisieren |
| $\frac{45}{2x - 9} - 2 = -\frac{27}{-(2x - 9)}$ | |
| $\frac{45}{2x - 9} - 2 = \frac{27}{2x - 9}$ | · (2x - 9) (= kleinstes gemeinsames Vielfaches aller Nenner) |
| $\frac{45(2x - 9)}{2x - 9} - 2(2x - 9) = \frac{27(2x - 9)}{2x - 9}$ | auf beiden Seiten kürzen |
| $45 - 2(2x - 9) = 27$ | ausmultiplizieren |
| $45 - (4x - 18) = 27$ | Klammern auflösen |
| $45 - 4x + 18 = 27$ | links vereinfachen |
| $63 - 4x = 27$ | + 4x, - 27 |
| $36 = 4x$ | Seiten vertauschen |
| $4x = 36$ | : 4 |
| $x = 9$ | |

d) $\frac{x}{x-1} - \frac{x-1}{x-2} = 0$ | $\cdot (x-1)(x-2)$ (= kleinstes gemeinsames Vielfaches aller Nenner)

$\frac{x(x-1)(x-2)}{x-1} - \frac{(x-1)(x-1)(x-2)}{x-2} = 0(x-1)(x-2)$ | Brüche kürzen

$x(x-2) - (x-1)^2 = 0$ | ausmultiplizieren

$x^2 - 2x - (x^2 - 2x + 1) = 0$ | Klammer auflösen

$x^2 - 2x - x^2 + 2x - 1 = 0$ | vereinfachen

$-1 = 0$

Diese Aussage ist für jede reelle Zahl x falsch. Daher hat die Gleichung keine Lösung.

Funktionen

12. a) $f(0)$
$= 3\cdot 0 - 4$
$= 0 - 4$
$= -4$
$f(-4)$
$= 3\cdot(-4) - 4$
$= -12 - 4$
$= -16$

b) $0 = f(x) = 3x - 4$
$3x - 4 = 0$ | $+ 4$
$3x = 4$ | $: 3$
$x = \frac{4}{3}$

13. a) $x = -1$, Punkt $P(-1|-2)$ auf dem Graf, daher $y = f(-1) = -2$

b) $x = 2$, Punkt $P(2|\approx 2.8)$ auf dem Graf, daher $y = f(2) \approx 2.8$

c) $y = f(x) = 2$, Punkte $P_1(-3|2)$ und $P_2(1|2)$ auf dem Graf, daher $x_1 = -3$ und $x_2 = 1$

d) $y = f(x) = 0$, Punkte $P_1(\approx -2.5|0)$ und $P_2(\approx 0.3|0)$ auf dem Graf, daher $x_1 \approx -2.5$ und $x_2 \approx 0.3$

14. a) allgemeine Funktionsgleichung einer linearen Funktion
$y = f(x) = ax + b$

$P_1(-2|5)$ und $P_2(2|-4)$ auf Graf (Gerade mit Steigung a)

Steigung $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-4 - 5}{2 - (-2)} = \frac{-9}{4} = -\frac{9}{4}$

Funktionsgleichung
$y = f(x) = y = f(x) = -\frac{9}{4}x + b$

$P_1(-2|5)$ auf Graf:
$y = f(-2) = -\frac{9}{4}\cdot(-2) + b = 5$

Bestimmungsgleichung für b
$\frac{9}{2} + b = 5$

Lösung
$b = \frac{1}{2}$

Funktionsgleichung
$y = f(x) = -\frac{9}{4}x + \frac{1}{2}$

b) Schnittpunkt $S_y(0|y)$ auf Graf:
$y = f(0) = -\frac{9}{4}\cdot 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$S_y\left(0\middle|\frac{1}{2}\right)$

c) Schnittpunkt $S_x(x|0)$ auf Graf:
$0 = f(x) = -\frac{9}{4}x + \frac{1}{2}$ mit Lösung $x = \frac{2}{9}$

$S_x\left(\frac{2}{9}\middle|0\right)$